

## — OLASILIK —

Örnek Uzayı: Bir deneydeki tüm çıktıların kümesine örnek uzay denir.

Olay: Örnek uzayın alt kümelerinin herbirine olay denir.

Kesin Olay:  $E$ , örnek uzayına kesin olay denir.

Bir zarın havaya atılması deneyinde gelen sayının 7 den küçük olması kesin olaydır.

İmkansız Olay: Boş küme olarak imkansız olay (imkansız olay)

denir. Bir zarın atılması deneyinde gelen sayının 9 olması olayı imkansız olaydır.

Ayrık Olay:  $A$  ve  $B$  aynı örnek uzayın iki olayı olsun.

$A \cap B = \emptyset$  ise  $A$  ve  $B$  olayları ayrık olaylardır.

örnek: 2 zar havaya atılıyor. Zarların üste gelen sayıların toplamının 7 olması olayı ile, üste gelen sayıların aynı olması olayı ayrık olaydır.

örnek:

6M
7S
8Y

Torbadan iki bilye çekiliyor.

A: İkisinde mavi olma olayı

B: İkisinde yeşil olması olayı

$$A \cap B = \emptyset$$

Olasılık Fonksiyonu: Bir  $E$  örnek uzayının, tüm alt kümelerinin oluşturduğu küme  $E_A$  olsun.

$$P: E_A \longrightarrow [0,1]$$

$$A \longrightarrow P(A)$$

Şeklinde tanımlanan  $P$  fonksiyonu, aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona olasılık fonksiyonu denir.

i)  $A \subset E_A$  için  $0 \leq P(A) \leq 1$

ii)  $P(E) = 1$  ve  $P(\emptyset) = 0$

iii)  $A \subset E_A$ ,  $B \subset E_A$ ,  $A \cap B = \emptyset$  ise

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ dir.}$$

Örnek:  $E = \{a, b\}$  örnek uzayı için

$$E_A = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \} \text{ dir.}$$

$$P: E_A \longrightarrow [0,1] \text{ tanımlı, } P(\emptyset) = 0, P(\{a\}) = P(\{b\}) = \frac{1}{2}$$

$P(\{a, b\}) = 1$  ise  $P$  fonksiyonu bir olasılık fonksiyonudur.

i)  $P(\emptyset) = 0$

$$P(\{a\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\{b\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\{a, b\}) = 1$$

ii)  $P(\{a, b\}) = 1$

$$P(\emptyset) = 0$$

iii)  $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$

$$P(\{a\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\{b\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\{a, b\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 //$$

Eş Olasılı (Eş Olumlu) Örnek Uzayı!

$E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  için  $P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_n)$  ise

E örnek uzayı eş olumlu örnek uzayı denir.

Kural:  $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  eş olasılı örnek uzayı ise E de bir

A olayının olasılığı,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{A \text{ nin eleman sayısı}}{E \text{ nin eleman sayısı}} \text{ dir.}$$

Özellikler:

① A nın tümleyeni  $A'$  olmak üzere,

$$P(A) + P(A') = 1$$

②  $A \cap B \neq \emptyset$  ise,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

③  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  ikiser ikiser ayrık olaylar ve

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = E \text{ ise,}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \text{ dir.}$$

④  $A \subset B$  ise  $P(A) \leq P(B)$  dir.

## Koşullu Olasılık

Bir  $E$  örnek uzayına ait  $A$  ve  $B$  olayları için;  $A$  olayının olasılığı,  $B$  olayının gerçekleşmiş olmasına bağlı ise buna koşullu olasılık denir.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (A \text{ olayının } B \text{ koşullu olasılığı})$$

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) \quad (\text{çarpım kuralı})$$

## Bağımsız ve Bağımlı Olaylar:

$E$  örnek uzayında iki olay,  $A$  ve  $B$  olsun.

$P(A) > 0$  ve  $P(B) > 0$  olmak üzere,  $B$  olayının olasılığı,  $A$  olayının olasılığını değiştirmiyorsa,  $A$  olayı;  $B$  olayından bağımsızdır,

$P(A) = P(A/B)$  şeklinde gösterilir. İki olay bağımsız değilse bunlara bağımlı olay denir.

Kural:  $A, B \subseteq E$  ve  $A$  ve  $B$  olayları bağımsız ise,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ dir.}$$

Tekrarlanan olaylar:  $P$ : olayın olması olasılığı

$P'$ : olayın olmaması olasılığı

Olay  $n$  defa tekrarlandığında  $r$  fazlasının istenen olması olasılığı,

$$\binom{n}{r} (P)^r \cdot (P')^{n-r} \text{ dir.}$$

## UYGULAMALAR

- ① Bir torbada, aynı büyüklükte ve aynı ağırlıkta 5 sarı, 4 kırmızı birer top vardır. Bu torbadan rastgele aynı anda çekilen 5 topun 3'ünün sarı, 2'sinin kırmızı olma olasılığı nedir.

Çözüm:

$$\begin{array}{|c|} \hline 5S \\ \hline 4K \\ \hline \end{array}$$

$$s(A) = \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{2} = 10 \cdot 6 = 60$$

$$s(E) = \binom{9}{5} = 126$$

$$P(A) = \frac{60}{126} = \frac{10}{21} //$$

- ② Bir torbada özdeş 4 mavi, 5 yeşil top vardır. Torbadan çekilen 2 topun, aynı renkte olma olasılığı nedir.

Çözüm:

$$\begin{array}{|c|} \hline 4M \\ \hline 5Y \\ \hline \end{array}$$

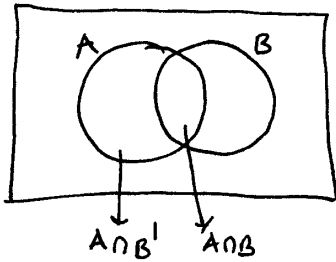
$$P(A) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} //$$

- ③ A ve B, E örnek uzayında iki olaydır.

$$P(A) = \frac{5}{8}, \quad P(B) = \frac{1}{8} \quad \text{ve} \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2} \quad \text{olduğuna}$$

göre  $P(A \cap B')$  kaçtır.

Çözüm:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{8} + \frac{1}{8} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$$

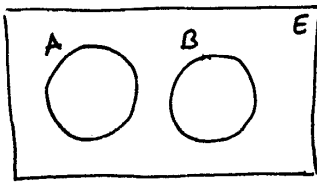
$$\frac{5}{8} = P(A \cap B') + \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B') = \frac{3}{8} //$$

④ A ve B, E örnek uzayının ayrık olaylarıdır.

$$P(A \cap B') = \frac{1}{4}, \quad P(A) = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre,  $P(B') = ?$

Çözüm:  $B' \equiv A \cup (A' \cap B')$  ise  $P(B') = P(A) + P(A' \cap B')$



ayrık

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{4} //$$

⑤ 40 kişilik bir sınıftaki öğrencilerin 18'i erkek öğrencidir. Bu sınıftaki erkeklerin 4 ü, kızların ise 8'i yeşil gözlüdür. Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin kız veya yeşil gözlü olma olasılığını nedir.

Çözüm: A: Kız öğrenci olma olayı

Kız	Erkek
22	18

B: Yeşil gözlü olma olayı

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{22}{40} + \frac{12}{40} - \frac{8}{40} = \frac{13}{20} //$$

⑥ Aynı büyüklükte 5 sarı, 6 kırmızı bilyenin bulunduğu bir torbadan, rastgele seçilen üç bilyeden, en az birinin kırmızı olma olasılığı nedir.

Çözüm:  $s(E) = \binom{11}{3} = 165$

$$s(A) = \binom{13}{3} - \binom{5}{3} = 165 - 10 = 155$$

$$P(A) = \frac{155}{165} = \frac{31}{33} //$$

- 7) %80 i bayan, %20 si erkek olan bir grupta; bayanların  $\frac{3}{4}$  ü, erkeklerin  $\frac{1}{2}$  si spor yapmaktadır. Gruptan seçilen birinin bayan veya spor yapan bir kişi olma olasılığı nedir.

Çözüm:

Erkek	Bayan	içer	Spor yapan	Erkek	Bayan
20	80		10	60	
100 kişi					

A: Bayan olma olayı

B: Spor yapanlar olayı

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{80}{100} + \frac{70}{100} - \frac{60}{100}$$

$$= \frac{90}{100} = \frac{9}{10} //$$

- 8) 4 tanesi bozuk olan 8 ampul arasından rastgele seçilen 3 ampulden en az ikisinin bozuk olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:  $s(E) = \binom{8}{3} = 56$

A: 2 bozuk, 1 sağlam veya 3 bozuk  $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{4}{3} = 28$

$$P(A) = \frac{28}{56} = \frac{1}{2} //$$

- 9) Farklı 2 Matematik, 4 Fizik, 3 Kimya kitabı bir rafte yan yana diziliyor. Fizik kitaplarının yan yana gelmeme olasılığı kaçtır?

Çözüm:  $s(E) = 9!$

A:  $(\underbrace{F_1 F_2 F_3 F_4}_{\text{yan yana gelmesi}}) M_1 M_2 K_1 K_2 K_3$  ise  $6! \cdot 4!$

$$A: 9! - 6! \cdot 4! = 6! \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7 - 4!) = 6! \cdot 24 \cdot 20$$

$$P(A) = \frac{6! \cdot 24 \cdot 20}{9!} = \frac{20}{21} //$$

10) 240 sayısının tam bölenlerinin herbiri bir kağıda yazılıp bir torbaya atılıyor. Rastgele seçilen bir kağıtta 240 sayısının çift doğal sayı böleni olma olasılığı kaçtır.

Çözüm:  $240 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1$       pozitif bölenleri sayısı =  $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$   
 Tam bölenleri sayısı =  $2 \cdot 20 = 40$

Pozitif çift bölenlerinin sayısı:  $240 = 2 \cdot (2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1)$  ise  
 $\rightarrow 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 //$

$$P(A) = \frac{16}{40} = \frac{2}{5} //$$

11) 2233345 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek 7 basamaklı sayılardan biri rastgele seçiliyor. Bu sayıdaki 2 rakamlarının yan yana olma olasılığı kaçtır.

Çözüm:  $s(E) = \frac{7!}{2! \cdot 3!} =$        $s(A) = \frac{6!}{3!}$

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{\frac{6!}{3!}}{\frac{7!}{2! \cdot 3!}} = \frac{2}{7} //$$

12) Altı çocuklu bir ailenin çocuklarından en az dördünün kız olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:  $s(E) = 2^6 = 64$

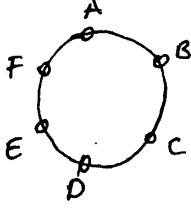
A: 6 çocukten 4'ü kız, 5'i kız veya 6'sı kız

$$s(A) = \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 15 + 6 + 1 = 22$$

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32} //$$



13



Şekildeki altı nokta ile çizilebilecek çokgenlerden seçilen bir çokgenin beşgen olma olasılığı kaçtır?  
( $\frac{1}{7}$ )

14

6 basamaklı 123456 sayısının rakamlarından 3 tanesi seçilerek oluşturulan üç basamaklı bir sayının rakamları toplamının tek sayı olma olasılığı kaçtır?  
( $\frac{1}{2}$ )

15

Ali'nin yanında bulunduğu 5 kişilik bir gruptan seçilebilecek 2 kişi arasında Ali'nin de bulunma olasılığı kaçtır?  
( $\frac{2}{5}$ )

16

$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{15}{x-2} \in \mathbb{Z} \right\}$  kümesinden seçilen bir elemanın doğal sayı olma olasılığı kaçtır?  
( $\frac{5}{8}$ )

17

Bir fabrikada üretilen ürünlerin %40'ı x makinasından, %60'ı y makinasından üretilmektedir. x makinası %5 oranında, y makinası %10 oranında hatalı üretim yapmaktadır. Eşit süre çalıştırılan bu makinalarla üretilen bir malın hatalı olma olasılığı nedir.  
( $\frac{2}{25}$ )

18) I. kutuda 6 siyah, 3 beyaz bilye; II. kutuda 3 siyah, 2 beyaz bilye vardır. I. kutudan rastgele alınan bir bilye rengine bakılmadan II. kutuya atılıyor.

II. kutudan rastgele alınan bir bilyenin beyaz olma olasılığı kaç?

$$\left(\frac{7}{18}\right)$$

19) Ahmet ile Ayşe'nin bir sınavı kazanma olasılıkları sırasıyla  $\frac{4}{5}$  ve  $\frac{5}{7}$  dir. Herhangi birinin sınavı kazanma olasılığı diğerine bağılı olmadığına göre, bu sınavı Ahmet ve Ayşe'den en az birinin kazanma olasılığı kaçtır?

$$1 - \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7}}_{\text{kazanamama}} = \frac{33}{35} //$$

20) 5 Evli çiftin bulunduğu bir gruptan rastgele seçilen 4 kişinin 2 evli çift olma olasılığı kaçtır?

$$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{21} //$$

21) 5 tane madeni para aynı anda düz bir zemine atıldığında 3 iğün yarı, 2 sınıh tura gelme olasılığı kaçtır?

$$(Y Y Y T T) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5}{16} //$$

(22) 1. torbada 3 beyaz, 2 kırmızı ve II. torbada 2 beyaz, 3 mavi bilye vardır. 1. torbadan rastgele seçilen bir bilye II. torbadan atılıyor. Buna göre, II. torbadan rastgele çekilen bir topun 1. torbadan çekilen bilye ile farklı renkte olma olasılığı kaçtır?

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{19}{30} //$$

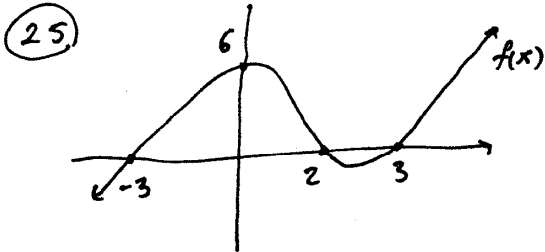
(23) 2 yüzü mavi, 3 yüzü kırmızı ve 1 yüzü beyaz renkte boyalı olan bir zar artarda iki defa atılıyor. Buna göre, bu zarın bir defa mavi yüzü, bir defa da kırmızı yüzü üzerine düşme olasılığı kaçtır?

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot 2! = \frac{1}{3} //$$

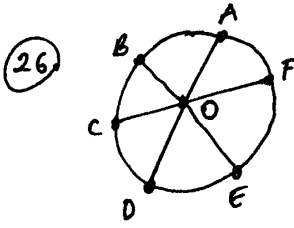
(24) Bir zarın 1 yüzü sarı, 2 yüzü mavi ve 3 yüzü kırmızı renkle boyanıyor. Buna göre, zar bir kez atıldığında sarı yüzünün görünme olasılığı kaçtır.

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

↓  
görünmeme



$f(x)=2$  denkleminin köklerinden rastgele bir sayı seçiliyor. Bu sayının pozitif olma olasılığı kaçtır.



O merkezli verilen çemberde oluşan yaylardan herhangi bir yay seçildiğinde, bu yayın bir yarım çember olma olasılığı kaçtır?

(27) 40 kişilik bir sınıfın 15'i erkektir. Erkeklerin 5'i, kızların 10'u sarıdır. Sınıfta rastgele seçilen bir öğrencinin kız olduğu bilindiğine göre, sarıya olma olasılığı kaçtır.

$$\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

(28) 4 mavi, 6 yeşil bilye bulunan bir torbadan rastgele seçilen iki bilyeden birinin mavi olduğu bilindiğine göre, diğerinin yeşil olma olasılığı kaçtır.

$$MY \text{ veya } MM \quad \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{1} + \binom{4}{2}}{24} = 30 \quad \frac{24}{30} = \frac{4}{5} //$$

(29) Bir çift zar atılıyor. Zarların üst yüzündeki sayıların toplamının 8 olduğu görülüyor. Buna göre, zarların birinin üzerindeki sayının 6 olma olasılığı kaçtır?

$$\frac{2}{5} //$$

- 30) Bir soruyu Duygu'nun görme olasılığı  $\frac{2}{5}$ , aynı soruyu Yasin'in görme olasılığı  $\frac{3}{8}$  olduğuna göre bu sorunun Duygu veya Yasin'in görme olasılığı kaçtır.

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{8} - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{8} //$$

- 31) İki zar ile iki madeni para birlikte atılıyor. Paraların en çok birinin yazı gelmesi ve zarların üst yüzündeki rakamların toplamının 7 den büyük gelmesi olasılığı kaçtır?

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{16} //$$

- 32) Bir zar 5 defa atılıyor. 3 defa 4 gelme olasılığı kaçtır.

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{250}{6^5} //$$

- 33) Bir avcının hedefi vurma olasılığı  $\frac{1}{5}$  tir. Bu avcı hedefe 3 atış yaparsa hedefi en az 2 defa vurma olasılığı kaçtır?

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3!}{2!} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{13}{125} //$$

34) Üç atıcının hedefi varma olasılıkları sırasıyla  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  ve  $\frac{2}{5}$  tir.

Bu üç atıcı birer atış yapıyor. Sadece ikisinin hedefi varma olasılığı kaçtır?

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10} //$$

35) Hileli bir zar havaya atıldığında üst yüze herhangi bir sayının gelmesi olasılığı bu sayı ile ters orantılıdır. Bu zar havaya atıldığında üst yüze 5 gelmesi olasılığı kaçtır?

$$k + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \dots + \frac{k}{6} = 1 \quad k = \frac{60}{147} = \frac{20}{49} \quad \frac{k}{5} = \frac{20}{5 \cdot 49} = \frac{4}{49} //$$

36) 445567 sayısının rakamları yerdışı olarak oluşturulan altı basamaklı tüm sayılardan rastgele bir sayı seçiliyor. Bu sayının bir tek sayı olduğu bilindiğine göre, 5 ile tam bölünebilme olasılığı kaçtır.

$$\frac{2}{3} //$$

37) İki zar birlikte atıldığında zarlardan sadece birinin üst yüzüne 2 geldiği bilindiğine göre, zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 5 olması olasılığı kaçtır.

$$\frac{1}{5} //$$